Revista Colombiana de Física, Vol. 42, No. 3 de 2010.

El Difusor Y La Tobera En Un Túnel De Viento

The Diffuser And The Nozzle In A Wind Tunnel

R. Martínez * [a], G. A. Patiño [a], G. A. Gaviria M. [a]

[a] *Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá.*

Recibido 13.12.10; Aceptado 13.02.11; Publicado en línea 17.04.11.

Resumen

Se consideran las pérdidas de presión en el difusor y la tobera debidas a la geometría y a los efectos viscosos en un túnel de viento.

Palabras Clave: Túnel de viento; Difusor; Tobera.

Abstract

We consider losses of pressure in the difussor and nozzle due to geometry and viscous effects in the wind tunnel.

Keywords: Wind tunnel; Diffuser; Nozzle.
PACS: 47.10.-g.

©2010. Revista Colombiana de Física. Todos los derechos reservados.

1. Introducción

Como es sabido un fluido sufre pérdidas de energía y caídas de presión cuando circula a través del túnel. Por este motivo se suelen colocar unos dispositivos que reducen la velocidad con la menor pérdida de energía posible, esto con el fín de ganar presión en el fluido de la forma más eficiente posible. Consideremos el siguiente difusor, caracterizado por un ángulo de expansión dado por:

$$\theta_e = \arctan\left(\frac{R_2 - R_1}{L}\right).$$

Los radios de entrada y salida son definidos como la mitad del diámetro hidráulico, que a su vez está definido por:

$$D \equiv 2\sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

donde A es el área, ver la figura 1, luego

$$\theta_e = \arctan\left(\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{A_R} - 1}{L/D_1}\right)$$

siendo $A_R \equiv \frac{A_2}{A_1}$.

Para hacer un estudio más detallado del difusor utilizaremos un diagrama de Mollier como el mostrado en la figura 1. Este diagrama muestra el paso del estado 1 (la entrada del fluido al difusor) al estado 2 (la salida del fluido del difusor); el punto $2s$ es si pasamos del estado 1 al estado 2 de forma isentrópica, el punto 01 es si pasamos del estado 1 a un estado de estancamiento (velocidad cero) de forma isentrópica, el punto 02 tiene una interpretación similiar.

De la ecuación de energía en forma diferencial se tiene que

$$\rho\frac{D(e + v^2/2)}{Dt} = \rho\dot{q} - \nabla\cdot(p\vec{v}) + \rho(f\cdot\vec{v}).$$

Si utilizamos la ecuación de continuidad

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla\cdot\vec{v}$$

*remartinezm@unal.edu.co

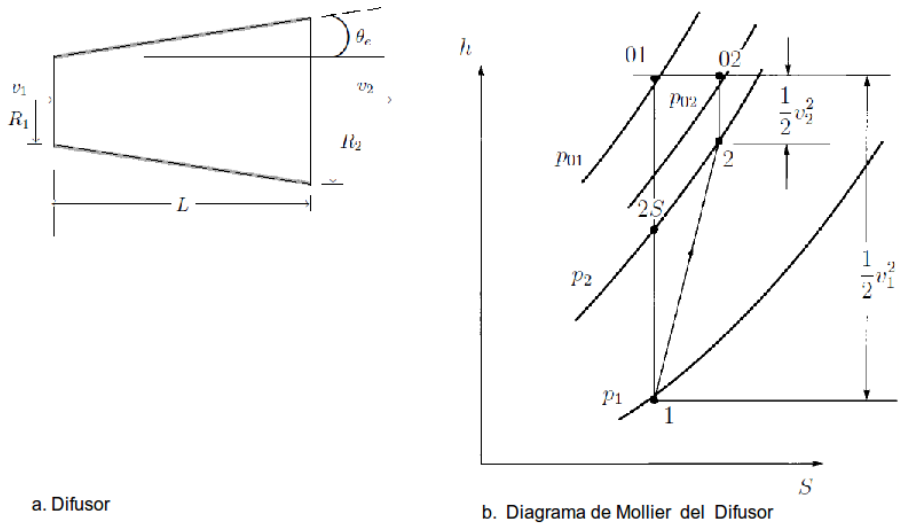

Fig. 1: Difusor

y asumimos que el proceso es adiabático estacionario sin presencia de fuerzas externas, se deduce que:

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(h + \frac{v^2}{2}\right) = 0, \tag{1}$$

y entonces

$$h + \frac{v^2}{2} = cte. \tag{2}$$

En un punto de estancamiento se cumple que $v = 0$, entonces $h_0 = cte$ y se obtiene

$$h_0 - h = \frac{1}{2}v^2. \tag{3}$$

Es por este motivo que la diferencia de entalpías h_{01} y h_1 en la figura 1, es $\frac{1}{2}v_1^2$ para el punto 1 y $\frac{1}{2}v_2^2$ para el punto 2. La eficiencia de un difusor se suele definir de dos formas:

$i)$ Como el cociente entre el cambio real de la entalpía respecto del cambio en la entalpía si el proceso hubiese sido isentrópico.

$ii)$ Como el cociente entre el coeficiente de incremento de presión real, respecto del coeficiente ideal.

En cierta medida la definición i es razonable puesto que la entalpía está conectada con la conservación de la energía. A partir de la definición i la eficiencia de un difusor η_D está dada por:

$$\eta_D = \frac{h_{2s} - h_1}{h_2 - h_1}, \tag{4}$$

en donde hemos utilizado las variables del diagrama de Mollier dado en la figura 1. Obsérvese que en el punto $2s$ se cumple que:

$$h_{2s} + \frac{v_{2s}^2}{2} = h_{02s}; \tag{5}$$

de igual forma se cumple en el punto 1

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_{01}. \tag{6}$$

Si el proceso es adiabático $h_{02s} = h_{01}$, obtenemos:

$$h_{2s} - h_1 = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_{2s}^2). \tag{7}$$

De igual manera si asumimos un proceso adiabático entre los puntos 1 y 2 obtenemos

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2). \tag{8}$$

Reemplazando se llega a:

$$\eta_D = \frac{v_1^2 - v_{2s}^2}{v_1^2 - v_2^2}. \tag{9}$$

Considerando de nuevo que $v^2 = \gamma RT$, podemos reescribir (9) como:

$$\eta_D = \frac{\frac{T_{2s}}{T_1} - 1}{\frac{T_2}{T_1} - 1}. \tag{10}$$

Como el proceso 1 a $2s$ es isentrópico,

$$\frac{T_{2s}}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{(\gamma-1)}{\gamma}}. \tag{11}$$

El proceso 01 a 02 es isotérmico, entonces

$$\Delta S = R \ln\left(\frac{p_{01}}{p_{02}}\right). \tag{12}$$

Y el proceso de $2s$ a 2 es a presión constante entonces

$$\Delta S = C_p \ln\left(\frac{T_2}{T_{2s}}\right). \tag{13}$$

Del diagrama de Mollier de la figura 1, se observa que ambos cambios de entropía son idénticos, luego

$$\left(\frac{T_2}{T_{2s}}\right) = \left(\frac{p_{01}}{p_{02}}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}, \tag{14}$$

pero

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T_{2s}}\,\frac{T_{2s}}{T_1} = \left[\left(\frac{p_{01}}{p_{02}}\right)\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right]^{(\gamma-1)/\gamma}. \tag{15}$$

Reemplazando se obtiene:

$$\eta_D = \frac{(p_2/p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{\left[(p_{01}/p_{02})\,(p_2/p_1)\right]^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}. \tag{16}$$

La ecuación (16) es muy útil puesto que permite determinar la eficiencia del difusor midiendo sólamente las presiones estática y de estancamiento; estas presiones pueden ser halladas con un tubo Pitot.

Como se había mencionado al principio de la discusión sobre los difusores, existe otra alternativa de determinar la eficiencia de este dispositivo utilizando los coeficientes de presión. De la ecuación (2) se tiene que:

$$e + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = cte.$$

Esa constante puede ser evaluada tomando la condición de estancamiento en los puntos 1 y 2 (entrada y salida del difusor), llegándose a

$$e_2 - e_1 = \frac{p_{01} - p_{02}}{\rho}. \tag{17}$$

La ecuación de energía (2) entre los puntos 1 y 2 se expresa como:

$$e_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = e_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$

y utilizando (17) llegamos a:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + \frac{\Delta p_0}{\rho} \quad \text{con} \quad \Delta p_0 \equiv p_{01} - p_{02} \tag{18}$$

Definido el coeficiente de presión ideal:

$$C_{pi} = 1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2, \tag{19}$$

podemos reescribir la ecuación de conservación (18) como:

$$C_p = C_{pi} - \frac{\Delta p_0}{q_1} = \frac{P_2 - P_1}{q1}$$

con $q_1 = \frac{1}{2}\rho v_1^2$. De esa forma la eficiencia del difusor según la definición ii estará dada por

$$\eta_D = \frac{C_{pi} - \frac{\Delta p_0}{q_1}}{C_{pi}}. \tag{20}$$

El coeficiente de presión ideal puede ser expresado en función de parámetros geométricos. Para esto, se utiliza la ecuación de continuidad dada por

$$\frac{v_1}{v_2} = A_R \quad \text{con} \quad A_R \equiv \frac{A_2}{A_1};$$

de esa forma se llega a que

$$C_{pi} = 1 - \frac{1}{{A_R}^2}. \tag{21}$$

Como conocemos la forma funcional de la eficiencia en el difusor, podríamos maximizarla para conocer bajo qué circunstancias tendríamos un máximo de presión recuperada. La ecuación diferencial resultante dará a su vez la forma en que debe ser diseñado el difusor de manera que sea lo más eficiente posible. Maximizando el logaritmo de la función para η_D dada por (20) y utilizando (21), obtenemos que

$$\frac{\partial A_2}{\partial \theta} = \frac{q_1 A_2^3}{2\Delta p_0\, A_1^2}\left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\Delta p_0}{q_1}\right);$$

en esa ecuación A_1 y q_1 son el área y la presión dinámica a la entrada del difusor. Considerando que el comportamiento de $\frac{\Delta p_0}{q_1}$ en función del ángulo puede ser determinado experimentalmente a través de una regresión de datos obtenidos con un tubo Pitot, podemos determinar cómo debe ser el área de salida del difusor.

En el difusor las pérdidas son de dos tipos: una es debido a la fricción k_{fric} con las paredes y otra debido a la expansión k_{exp} del fluido en el dispositivo. Como el ángulo de expansión del difusor no es muy pronunciado, se asumirá que en cada sección transversal de ancho diferencial se cumple el modelo de pérdidas en secciones de área constante. Utilizando la definición de caída de presión dada por $\Delta p_0 = qk$ y la ecuación (12) de forma diferencial en cada sección transversal, obtenemos:

$$k_{fric} = \int \frac{f\rho v^2}{D_1 \rho_1 v_1^2}\, dl.$$

Utilizando la ecuación de continuidad y asumiendo que el fluido es incompresible se llega a

$$k_{fric} = f A_1^2 \int \frac{1}{D_1 A_2^2}\, dl.$$

En la mayoría de los casos los difusores son cónicos, de esa forma se puede determinar el área A_2 como una función de x (ver figura 2).

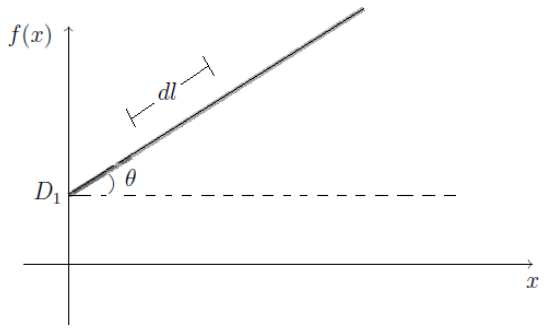

Fig. 2: Difusor cónico

Considerando que por definición de diámetro hidráulico $D = 2\sqrt{\frac{A}{\pi}}$ y además $dl = \frac{dx}{\cos\theta}$ entonces

$$k_{fric} = \frac{16 f A_1^2}{\pi^2 \cos\theta} \int_0^l \frac{1}{(D_1 + x\tan\theta)^5}\, dx;$$

integrando esa expresión se llega a

$$k_{\text{fric}} = \left(1 - \frac{1}{A_R^2}\right) \frac{f}{8\sin\theta}. \tag{22}$$

Como se indicó anteriormente en el difusor se cumple que

$$k_D = k_{fric} + k_{exp}$$

Definida la cantidad:

$$k'_{exp} = \frac{k_{exp}}{\left(\frac{A_R - 1}{A_R}\right)^2}$$

llegándose finalmente a que:

$$k_D = \left\{ k'_{exp} + \frac{f}{8\sin\theta}\left(\frac{A_R+1}{A_R-1}\right)\right\}\left(\frac{A_R-1}{A_R}\right)^2 \tag{23}$$

2. Zona de Contracción o Tobera (p)

Para un fluido estacionario podemos inferir que el máximo valor de la velocidad estará dado por

$$v_{max} = \sqrt{2h_0}; \tag{24}$$

para gases ideales se tiene que $h_0 = C_p T$. Esa relación puede ser llevada a una forma más conveniente al utilizar el hecho de que $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ y al considerar la ecuación de estado para gases ideales, llegándose a

$$h_0 = \frac{\gamma p}{\rho} \frac{1}{(\gamma - 1)}. \tag{25}$$

Considerando que la cantidad $\frac{\gamma p}{\rho}$ es justamente el cuadrado de la velocidad local del sonido en el fluido, se puede transformar (24) para obtener

$$v_{max} = a\sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}\,, \quad \text{con } a \text{ velocidad local del sonido.} \tag{26}$$

Para fluidos subsónicos la tobera (ver figura 3) tendrá por objetivo aumentar la velocidad del fluido con una consecuente disminución en la presión, tal y como se puede ver de la ecuación de Euler. Para estudiar cómo se comporta el fluido en el interior de tal dispositivo, se determinará en primera instancia la densidad de flujo, que está dada por $j = \rho v$. Usando $a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$ se obtiene

$$v^2 = \frac{2\gamma}{(\gamma - 1)} \frac{p_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]. \tag{27}$$

Para fluidos isentrópicos se cumple:

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma},$$

entonces la densidad de flujo en la tobera estará dada por

$$j = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma}\left\{\frac{2\gamma}{(\gamma-1)} p_0\rho_0\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]\right\}^{1/2}. \tag{28}$$

Como estamos estudiando fluidos subsónicos la mínima presión que se puede alcanzar en la entrada de la tobera es $p = p_*$, entendiendo p_* como aquella presión que tiene el fluido cuando este ha alcanzado una velocidad sónica. Este limitante impone una cota superior a la ecuación (28) representada como j_{max}, que se logra cuando $p = p_*$; este j_{max} sólo se puede presentar en una región de área mínima, es decir justo en el extremo o salida de la tobera. Como j está acotado superiormente lo mismo sucederá con el flujo de masa ($\dot{m}$), pues el máximo flujo de masa será cuando

$$\dot{m}_{max} = \rho_* v_{max} S_{min}, \tag{29}$$

entendiendo el asterisco como las propiedades del fluido cuando se ha alcanzado una velocidad sónica. La velocidad máxima como se ha dicho se logra en la parte más estrecha de la tobera justo cuando el fluido es sónico a la entrada de él; a partir de (27) esta velocidad está dada por

$$v_{max} = \left(\frac{2\gamma p_0}{\rho_0(\gamma - 1)}\right)^{1/2}. \tag{30}$$

Para el caso del aire, claramente esa velocidad en la salida de la tobera será supersónica. Si el túnel de viento se

desea mantener en un régimen subsónico, es necesario conocer explícitamente estos límites, para saber la potencia necesaria en el motor de tal manera que el fluido se mantenga lejos de ellos.
Cuando $M = 1$ se tiene:

$$\frac{\rho_0}{\rho_*} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{1/(\gamma-1)}; \tag{31}$$

reemplazando se llega a

$$\dot{m}_{max} = \sqrt{(\gamma p_0 \rho_0)\left[\frac{2}{(\gamma+1)}\right]^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}} S_{min}. \tag{32}$$

Ese es el máximo régimen que se puede alcanzar en la parte más estrecha de la tobera. Ahora, supongamos que se ha alcanzado una presíon sónica (mínima presión permitida) a la entrada de la tobera. En esas condiciones como hemos visto se alcanza un máximo en la densidad de flujo y en la velocidad. Una forma de tratar de aumentar la velocidad a la salida de la tobera sería reduciendo la presión externa p_e a la entrada del mismo; el asunto es que si $p_e < p_*$ el fluido a la entrada de la tobera sería supersónico y el efecto de la tobera sería el contrario, es decir reduciría la velocidad a la salida. La tobera es colocada justo antes de la sección de prueba para hacer que el fluido llegue lo más veloz posible a la muestra, aunque esa velocidad debe estar limitada al hecho de que el fluido debe continuar siendo subsónico. Por ese motivo los límites para la velocidad, el flujo de masa y la densidad de flujo determinadas anteriormente son extremadamente relevantes.

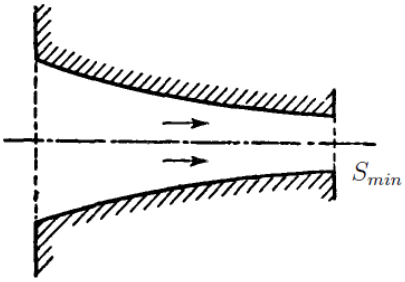

Fig. 3: Tobera o zona de contracción.

2.1. Eficiencia y Pérdidas en la tobera

Tal y como se discutió en el caso de los difusores, se hará un estudio de la tobera basado en el diagrama de Mollier mostrado en la figura 4. Estamos considerando una compresión desde el estado 1 (la entrada del fluido a la tobera) al estado 2 (la salida del fluido de la tobera); de nuevo el punto $2s$ representa el paso del estado 1 al 2 de forma isentrópica, 01 representa un paso isentrópico del estado 1 a un estado de estancamiento, los puntos 2 tienen una interpretación similar. La diferencia entre las entalpías de los procesos con sus respectivas entalpías de estancamiento h_0, sea $\frac{v^2}{2}$. Adicionalmente, se está asumiendo un proceso estacionario y adiabático, de forma que h_{01} y h_{02} estan a la misma altura.

Se define la eficiencia de la tobera, como el cociente entre la energía cinética específica real respecto de aquella si el proceso hubiese sido isentrópico, que es el proceso más ideal posible, entonces

$$\eta_N = \frac{\frac{1}{2}v_2^2}{\frac{1}{2}v_{2s}^2} \quad \text{de forma que} \quad \eta_N = \frac{1-\frac{h_2}{h_{01}}}{1-\frac{h_{2s}}{h_{01}}}.$$

Asumiendo que se tiene un gas ideal en el túnel, esta ecuación puede ser reescrita como

$$\eta_N = \frac{1-\frac{T_2}{T_{01}}}{1-\frac{T_{2s}}{T_{01}}},$$

que al utilizar una de las ecuaciones isentrópicas se puede llevar a la forma:

$$\eta_N = \frac{1-\frac{T_2}{T_{01}}}{1-\left(\frac{p_2}{p_{01}}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}}. \tag{33}$$

La ecuación (33) permite determinar la eficiencia de la tobera. Para esto sólo se necesitan medir las presiones total y de estancamiento y las respectivas temperaturas a la entrada y salida de la tobera, lo cual es experimentalmente sencillo de determinar.

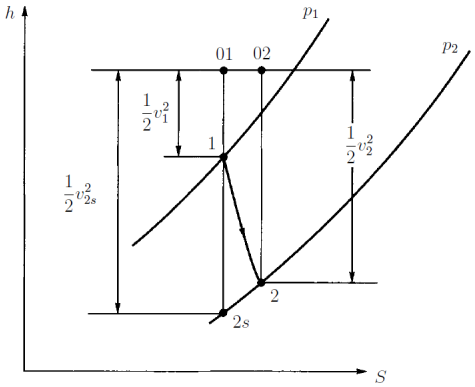

Fig. 4: Diagrama de Mollier para la tobera

Para hallar las pérdidas en la tobera, utilizamos la ecuación que representa las pérdidas en una sección con área transversal constante y se asumirá que se cumple en cada corte transversal de la tobera. De esa forma podemos determinar la pérdida total como

$$\Delta p_N = \int_0^{L_N} f\frac{\rho}{2}\frac{v_N^2}{D_N}\,dx, \tag{34}$$

donde L_N es la longitud de la tobera y D_N el diámetro hidráulico local. Aplicando la ecuación de continuidad entre un punto en la sección de entrada de la tobera y otro en la región de compresión (ver figura 3), obtenemos que

$$v_N D_N^2 = v_{zc} D_{zc}^2 \quad \text{luego} \quad v_N^2 = v_{zc}^2 \left(\frac{D_{sc}}{D_N}\right)^4 . \qquad (35)$$

Definiendo como es usual el coeficiente de pérdidas en la tobera como

$$k_N \equiv \frac{\Delta p_N}{q_{zc}}$$

y haciendo uso de (35) se puede escribir (34) como

$$k_N = f_{pro} \left(\frac{L_N}{D_{zc}}\right) \int_0^1 \left(\frac{D_{zc}}{D_N}\right)^5 d\left(\frac{x}{L_N}\right); \qquad (36)$$

el parámetro de fricción de Darcy se ha sacado de la integral y se le ha asignado un valor promedio en la tobera. La integral (36) se puede hacer de forma iterativa aproximándola a una serie de Riemann; esta aproximación es buena si la función que describe la tobera es suave, de manera que al pasar de un disco de diámetro D_{zc} en la zona de compresión al siguiente disco la función no cambia abruptamente.

3. Agradecimientos

Agradecemos a Colciencias por el apoyo financiero.

Referencias

[1] J.B. Barrow, H. Rae, and A. Pope, *Low-Speed Wind Tunnel Testing*, New York, John Wiley & Sons, 1999.

[2] F.M. White, *Fluid Mechanics*, Boston, McGraw-Hill Book Company.

[3] W.T. Eckert, K.W. Mort, and J. Jope, *Aerodynamic Design Guidelines and Computer Program for Estimation of Subsonic Wind Tunnel Performance*, NASA TN D-8243, October 1976.

[4] Anderson, Jhon D. *Fundamentals of Aerodynamics*, New York, McGraw-Hill , 2005.

[5] Anderson, Jhon D. *Modern Compressible Flow with historical perspective*, Singapore, Mc Graw Hill, 1990.